Uitwerking

Opg. 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & -10 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & \alpha \\ 2 & -2 & -14 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 & -2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & \alpha \\ 0 & -2 & -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} +1\tfrac{1}{2} & -1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\times -\tfrac{1}{2}) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{1}$$

Onderscheid nu 2 gevallen:

(I) Als $\alpha = -3$ is de gereduceerde echelonvorm van A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{1}$$

(II) Als $\alpha \neq -3$ kan rij 3 geschaald worden met $\dfrac{1}{\alpha+3}$, dus volgt:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} +1 & +1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deze laatste matrix is de gereduceerde echelonvorm van A als $\alpha \neq -3$ $\boxed{1}$

Opg. 2 Het stelsel vgl^n is strijdig $\Longleftrightarrow$

$\beta^2 + 9\beta - 22 = 0$ en $6 - 3\beta \neq 0 \Longleftrightarrow$ $\boxed{1}$

$(\beta+11)(\beta-2) = 0$ en $3(2-\beta) \neq 0 \Longleftrightarrow$

$\beta = -11$ $\boxed{1}$

Opg. 3 Omdat de aangevulde matrix in gereduceerde echelonvorm staat kan men direct aflezen:

$$\begin{cases} x_1 = 4 + 3x_2 + x_4 \\ x_2 \text{ is vrij} \\ x_3 = -7 - x_4 \\ x_4 \text{ is vrij} \\ x_5 = 2 \end{cases} \qquad \boxed{1}$$

Dat wordt in parametervorm:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{met } x_2, x_4 \in \mathbb{R} \qquad \boxed{1}$$

Opg. 4 a) Methode 1

Zij $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$, dan geldt $S(\underline{x}+\underline{y}) =$

$$S\left(\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3(x_1+y_1)+5(x_2+y_2) \\ 6(x_1+y_1)-10(x_2+y_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3x_1+5x_2 \\ 6x_1-10x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3y_1+5y_2 \\ 6y_1-10y_2 \end{bmatrix} = S(\underline{x}) + S(\underline{y}) \qquad \boxed{1}$$

OF:

Zij $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ en $c \in \mathbb{R}$, dan geldt $S(c\underline{x}) =$

$$S\left(\begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3(cx_1)+5(cx_2) \\ 6(cx_1)-10(cx_2) \end{bmatrix} =$$

$$c\begin{bmatrix} -3x_1+5x_2 \\ 6x_1-10x_2 \end{bmatrix} = c\,S(\underline{x}) \qquad \boxed{1}$$

Methode 2

$$S(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -10 \end{bmatrix}\underline{x} \quad \text{voor elke } \underline{x} \in \mathbb{R}^2.$$

OF:

Dus S is een matrixtransformatie en bijgevolg lineair $\qquad \boxed{2}$

b) $\underline{\mathrm{Nul}(S)}$

Los op $S(\underline{x}) = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = \mu \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ met $\mu \in \mathbb{R}$

Dus $\mathrm{Nul}(S) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ $\boxed{1}$

$\underline{\mathcal{R}(S)}$

Zij $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ dan $S(\underline{x}) = x_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$

Hieruit volgt:

$$\mathcal{R}(S) = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$\boxed{1}$

c) $\underline{e}_1 \xrightarrow{\text{Spieg.}} -\underline{e}_1 \xrightarrow{\text{Rot.}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$ $\boxed{1}$

$\underline{e}_2 \xrightarrow{\text{Spieg}} \underline{e}_2 \xrightarrow{\text{Rot}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$ $\boxed{1}$

De standaardmatrix van T is dus:

$$\begin{bmatrix} T(\underline{e}_1) & T(\underline{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$ $\boxed{\tfrac{1}{2}}$

Opg. 5 $(4B^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 4B^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow B^T = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & -3/16 \\ 1/4 & 1/8 \end{bmatrix}$ $\boxed{1\tfrac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow B = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 \\ -3/16 & 1/8 \end{bmatrix}$ $\boxed{1\tfrac{1}{2}}$

Opg. 6 | a) <u>Onjuist</u>,

Neem bijv. $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dan is $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ afhankelijk, immers $\underline{b} = 2\underline{a}$, maar $\underline{c}$ is geen lin. comb. van $\underline{a}$ en $\underline{b}$. Dus $\underline{c} \notin \text{Span}\{\underline{a}, \underline{b}\}$ ☒

$\boxed{2}$

b) <u>Onjuist</u>,

immers $T(\underline{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \underline{0}$, dus T is niet lineair. ☒

<u>N.B.</u> Men kan ook de lineariteitsvoorwaarden gebruiken.

$$T(\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ en}$$

$$T(\underline{e}_1) + T(\underline{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Dus $T(\underline{e}_1 + \underline{e}_2) \neq T(\underline{e}_1) + T(\underline{e}_2)$ hetgeen impliceert dat T niet lineair is. $\boxed{2}$

c) $(I_n + A)(I_n - A) = I_n^2 - I_n A + A I_n - A^2$

$= I_n - A + A - 0 = I_n$

en $(I_n - A)(I_n + A) = I_n^2 + I_n A - A I_n - A^2$

$= I_n + A - A - 0 = I_n$.

Hieruit volgt dat $I_n + A$ inverteerbaar is en $(I_n + A)^{-1} = I_n - A$.

De bewering is dus <u>juist</u> ☒

$\boxed{2}$